CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

TEMA 5 (Última modificación 8-7-2015)

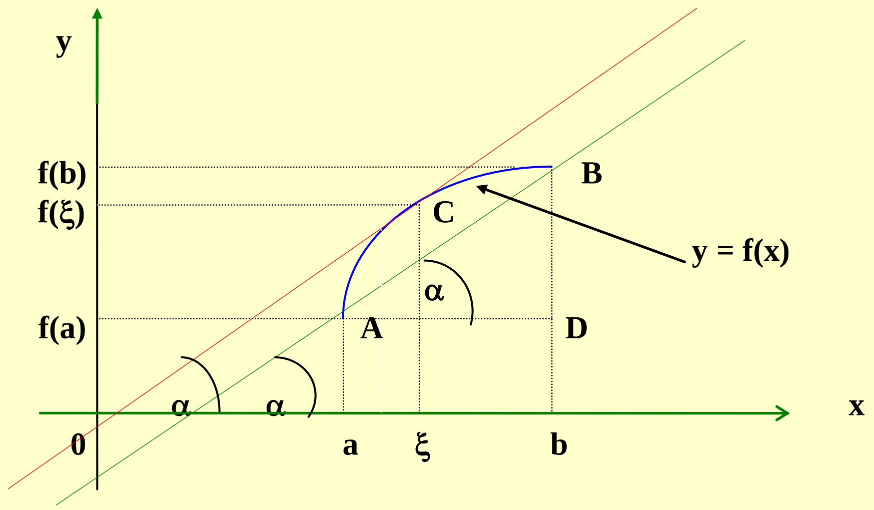
TEOREMA DEL VALOR MEDIO

TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE O DE LOS INCREMENTOS FINITOS PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE.

Si la función $y = f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces :

$$\exists\ \xi \in (a,b) \ / \ f(b) - f(a) = (b - a).\ f'(\xi)$$

Gráficamente:



Con el fin de aclarar el significado geométrico de éste teorema de Lagrange, consideremos la figura anterior. En ella, la magnitud $(f(b) - f(a)) / (b - a)$ representa la tangente del ángulo "α" de inclinación de la cuerda que pasa por los puntos A y B de la gráfica y cuyas abscisas son "a" y "b" :

$$\text{Tg}\ \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{(considerando el triangulo } \mathbf{ADB}\text{)}$$

Por otra parte, $f'(\xi)$ representa, como ya sabemos, la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa ξ : $\text{Tg}\ \alpha = f'(\xi)$

De aquí resulta que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ que equivale a : $f(b) - f(a) = (b - a) . f'(\xi)$ (1)

De modo que el significado geométrico de la igualdad (1), el Teorema de Lagrange visto, es el siguiente: Si por cada punto del arco AB puede trazarse una tangente, existirá en este arco AB, entre A y B, un punto C tal que en éste la recta tangente sea paralela a la cuerda que une los puntos A y B.

Ahora, si hacemos $h = b - a$, será $b = a + h$, y por lo tanto $\exists\ \theta : 0 < \theta < 1, / \xi = a + \theta . h$

Entonces (1) se podrá escribir:

$$f(a + h) - f(a) = h . f'(a + \theta . h) \qquad (2) \qquad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Finalmente, si escribimos $\Delta y = f(a + h) - f(a)$, resultará de (2): $\Delta y = h . f'(a + \theta h)$, con $0 < \theta < 1$

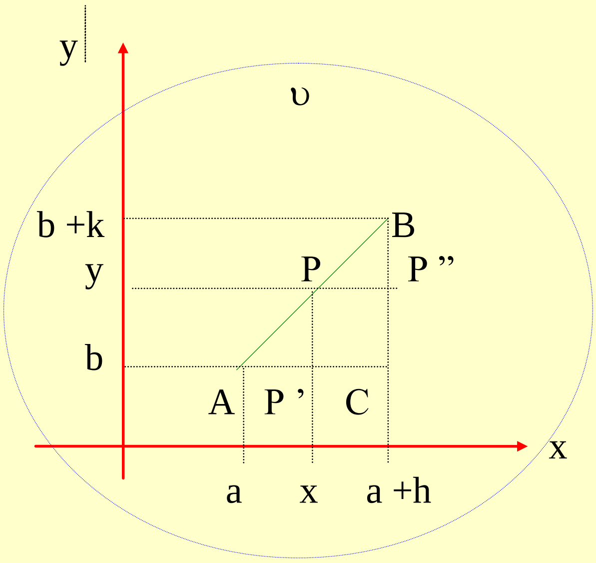
TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES.

Si la función $z = f(x,y)$ es diferenciable en un entorno abierto υ del punto (a,b) , entonces el incremento Δz de $f(x,y)$ se puede expresar:

$$\boldsymbol{\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a,b) = h \cdot f_X (a + \theta h, b + \theta k) + k \cdot f_Y (a + \theta h, b + \theta k)}$$

con $0 < \theta < 1$, h y k incrementos de las variables “x” e “y” respectivamente / $(a + h, b + k) \in \upsilon$

DEMOSTRACION: Sean $A(a ,b) \in R^2$, υ entorno abierto, circular o rectangular, de $A(a , b)$, $z = f(x ,y)$ una función diferenciable en υ y $B(a + h, b + k) \in \upsilon$.



Sea ahora $P(x ,y)$ un punto variable sobre el segmento AB, el cual está totalmente contenido en υ obviamente.
Por semejanza de los triángulos AP’P y ACB, ver figura anterior, tenemos:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AP'}{AC} = \frac{PP'}{CB} = t \qquad \text{con} \quad t \in [0, 1]$$

Aquí notamos que $\left| \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow P \equiv A \\ \\ t = 1 \Rightarrow P \equiv B \end{array} \right.$ resulta entonces que es:

$$\left| \begin{array}{l} t = \dfrac{AP'}{AC} = \dfrac{x - a}{h} \\ \\ t = \dfrac{P'P}{CB} = \dfrac{y - b}{k} \end{array} \right.$$

Resolviendo lo anterior en “x” e “y”, resulta:

$$\left| \begin{array}{l} x = a + h \cdot t = x(t) \\ \\ y = b + k \cdot t = y(t) \end{array} \right. \qquad t \in [0,1]$$

Entonces, $z = f(x,y)$ podrá escribirse, cuando $P(x,y) \in AB$, como:

$z = f(x ,y) = f(a + h \cdot t, b + k \cdot t) = F(t)$ con $t \in [0,1]$, o sea función compuesta de la variable "t".

De aquí se sigue que como $z = f(x ,y)$ es diferenciable y $x(t)$ e $y(t)$ son funciones derivables, será $z = f(x(t), y(t)) = F(t)$ derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, luego, por el teorema de Lagrange para funciones de una variable independiente aplicado a $F(t)$, obtendremos:

$F(t) - F(0) = t \cdot F'(\theta t)$ (1) con $0 < \theta < 1$ y $t \in [0,1]$

Notemos aquí que "θ" depende de "t". Por otra parte, es: $F(0) = f(a + h\,0, b + k\,0) = f(a ,b)$, y

$$F'(t) = \frac{d\,F(t)}{dt} = \frac{d\,f\left[x(t), y(t)\right]}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$F'(t) = f_X(a + h \cdot t, b + k \cdot t) \cdot h + f_Y(a + h \cdot t, b + k \cdot t) \cdot k$ y será

$F'(\theta t) = h \cdot f_X(a + h \cdot \theta t, b + k \cdot \theta t) + k \cdot f_Y(a + h \cdot \theta t, b + k \cdot \theta t)$

Haciendo los correspondientes reemplazos en (1), llegamos a:

$f(a + h \cdot t, b + k \cdot t) - f(a ,b) = t \cdot [h \cdot f_X(a + \theta h t, b + \theta k t) + k \cdot f_Y(a + \theta h t, b + \theta k t)]$ (2)

Hagamos ahora $t = 1$ en (2) : $f(a + h, b + k) - f(a ,b) = h \cdot f_X(a + \theta h, b + \theta k) + k \cdot f_Y(a + \theta h, b + \theta k)$,
y como $\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a ,b)$, tendremos finalmente que:

$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a ,b) = h \cdot f_X(a + \theta h, b + \theta k) + k \cdot f_Y(a + \theta h, b + \theta k)$ con $0 < \theta < 1$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE PARA FUNCIONES DE "n" VARIABLES INDEPENDIENTES

Si la función $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es diferenciable en un entorno abierto υ del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces el incremento total Δy se puede expresar:

$\Delta y = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

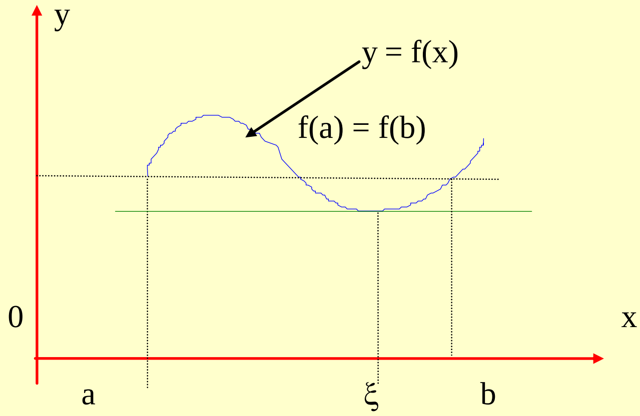
$= h_1 \cdot f_{X1}(x_1 + \theta h_1, \ldots, x_n + \theta h_n) + \ldots + h_n \cdot f_{Xn}(x_1 + \theta h_1, \ldots, x_n + \theta h_n) =$

$= \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot f_{xi}(x_1 + \theta h_1, \ldots, x_n + \theta h_n)$, donde $0 < \theta < 1$ y siempre que $(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) \in \upsilon$.

TEOREMA DE ROLLE

Si y = f(x) es continua en [a ,b] y derivable en (a ,b) y f(a) = f(b), entonces $\exists\ \xi \in$ (a,b) que cumple $f'(\xi) = 0$

Gráficamente:



Este teorema tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Si una curva contínua, con tangente en cada uno de sus puntos, corta a una recta paralela al eje 0x en dos puntos de abscisas “a” y “b”, con a < b, entonces en esta curva existirá por lo menos un punto de abscisa “ξ“ con $a < \xi < b$, en el cual la tangente es paralela al eje 0x (por ser $f'(\xi) = 0$).

TEOREMA DE CAUCHY

Si f(x) y g(x) son funciones continuas en [a ,b], con g(a) ≠ g(b), y derivables en (a ,b), con derivadas no simultáneamente nulas, entonces:

$\forall\ x \in (a,b)\ \exists\ \xi : a < \xi < x\ \ /\ \ \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ supuesto g(x) ≠ g(a).

O sea que el cociente de los incrementos de f y g es igual al cociente de las respectivas derivadas en un punto “ξ“, interior al intervalo [a,x].

TEOREMA GENERALIZADO DE CAUCHY

Si f(x) y g(x) son dos funciones derivables hasta el orden “k” en [a,b], tal que:

$f(a) = f'(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0$ (1)

$g(x),\ g'(x),\ ....,\ g^{(k-1)}(x)$ son nulas únicamente en x = a

$g^{(k)}(x) \neq 0\ \ \forall\ x \in [a,b]$, entonces:

$\forall\ x \in (a,b]\ \exists\ \xi :\ a < \xi < x\ /\ \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{k}(\xi)}{g^{k}(\xi)}$

FORMULA GENERALIZADA DE Lagrange

Si f(x) es una función derivable en [a, b] hasta el orden "k" y se anula junto con sus (k - 1) primeras derivadas en x = a, entonces:

$$\forall\, x \in (a\,,b]\ \exists\, \xi : a < \xi < x \ /\ f(x) = \frac{(x-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(\xi)$$

FORMULA DE MAC LAURIN PARA POLINOMIOS

Sea P(x) un polinomio de grado "n" en R, digamos: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n\ x^n \quad \forall\, x \in R$

Queremos determinar los valores de los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 , ..., a_n en función de los valores que toma el polinomio juntamente con algunas de sus derivadas en el punto x = 0 (0rígen).

$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_S x^S + ... + a_n x^n$
$P(0) = a_0 + 0 + 0 + ... + 0 + ... + 0 = a_0$
$P'(x) = a_1 + 2\, a_2 x + ... + s\, a_S x^{S-1} + ... + n\, a_n x^{n-1}$
$P'(0) = a_1 + 0 + 0 + ... + 0 + ... + 0 = 1!\, a_1$
$P''(x) = 2\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3 x + ... + s \cdot (s-1)\, a_S x^{S-2} + ... + n\,(n-1)\, a_n x^{n-2}$
$P''(0) = 2\, a_2 + 0 + 0 + ... + 0 + ... + 0 = 2\, a_2 = 2!\, a_2$
....
$P^{(n)}(x) = n\,(n-1)\,(n-2) ......1\, a_n x^{n-n} = n!\, a_n$
$P^{(n)}(0) = n!\, a_n$

Por lo tanto, los coeficientes de P(x) resultan en función del valor del polinomio y sus "n" primeras derivadas en x = 0, así :

$a_0 = P(0)$

$a_1 = \dfrac{P'(0)}{1!}$

$a_2 = \dfrac{P''(0)}{2!}$

....

$a_n = \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}$ Finalmente, P(x) se puede rescribir así:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}\, x + \frac{P''(0)}{2!}\, x^2 + ... + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \ ,\ \forall\, x \in R$$

Esta última expresión recibe el nombre de FORMULA DE MAC LAURIN PARA UN POLINOMIO

FORMULA DE MAC LAURIN PARA UNA FUNCION f(x)

En general, la fórmula de Mac Laurin para polinomios no podría aplicarse sin más para una función cualquiera f(x), derivable hasta el orden "n" en un entorno υ de $x_0 = 0$, ya que en general f(x) no es un polinomio:

$$f(x) \neq f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.x^3 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}.x^n$$

y al segundo miembro le "**faltaría algo**" para completar la función f(x).

Si llamamos T_n (x) a ese "**algo**" que haría posible la igualdad de ambos miembros, una función de la variable "x", tendríamos:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \frac{f''(0)}{2!}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.x^3 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}.x^n + T_n(x) \; \forall \; x \in \upsilon$$

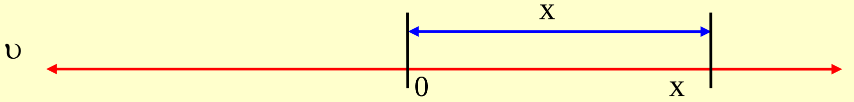
Esta última expresión se denomina **Fórmula de Mac Laurin para una función f(x)** derivable hasta el orden "n" en un entorno υ de x =0. La función T_n (x) recibe el nombre de **Término Complementario** o **Resto**, y trataremos de encontrar una expresión para él mas adelante.

FORMULA DE TAYLOR PARA UNA FUNCION f(x)

La fórmula de Mac Laurin para funciones que hemos visto, está desarrollada alrededor de x = 0, esto es, considerando los valores de f(x) y de $f(x)^{(n)}$ en x = 0. Es evidente que se podrían tener fórmulas similares alrededor de cualquier punto x = a conveniente, es decir, en un entorno υ de x = a.

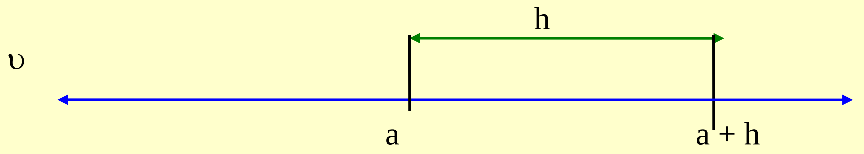
Gráficamente:

En la fórmula de Mac Laurin:



(I)

υ entorno de $x_0 = 0$ También, si υ entorno de x_0 = a, convenientemente:



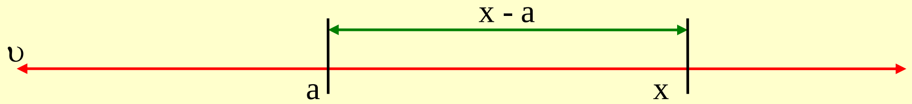
(II)

Entonces, según (I) y (II), reemplacemos en la fórmula de Mac Laurin para f(x) indicada antes:
el punto "0" por el punto "a" , el punto "x"por el punto "a + h" , la "longitud" "x" "h"
y resultará así la **Fórmula de TAYLOR para f(x)** siguiente.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.h + \frac{f''(a)}{2!}.h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.h^3 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.h^n + T_n(a+h) \quad \forall \; x \in \upsilon \text{ entorno}$$

abierto de x = a.

Ahora, si hacemos a + h = x en (II)



(III)

Tendremos, haciendo los cambios respectivos según (III) y teniendo en cuenta (II)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + T_n(x)$$

$\forall \; x \in \upsilon$, entorno abierto de $x_0 = a$

Lo anterior es otra presentación de la fórmula de Taylor para f(x).

EXPRESION DEL RESTO EN LA FORMULA DE TAYLOR

Es obvio que para que una f(x) pueda expresarse mediante la fórmula de Taylor o de Mac Laurin, debe ser derivable por lo menos hasta el orden “n” en un entorno abierto de x = a o bien de x = 0, respectivamente. Supongamos, ahora, que f(x) es derivable hasta el orden “n + 1” en un entorno abierto de x = a y encontremos una expresión para el término complementario T_n (x).
Como por la fórmula de Taylor para f(x) es:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \ldots\ldots + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + T_n(x)$$

resultará que:

$$T_n(x) = f(x) - f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \ldots\ldots + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n$$

es derivable hasta el orden (n + 1) en υ. Además:

$T_n(a) = f(a) - f(a) - 0 - 0 - \ldots\ldots - 0 = 0$ Ahora:

$$T_n'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)\,(x-a)}{1!} - \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$T_n'(a) = f'(a) - f'(a) - 0 - 0 - \ldots\ldots - 0 = 0$ También:

$$T_n''(x) = f''(x) - f''(a) - f'''(a)(x-a) - \ldots\ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$$

$T_n''(a) = f''(a) - f''(a) - 0 - 0 - \ldots\ldots - 0 = 0$
....
Finalmente:
$T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$
$T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a) = 0$
y así:
$T_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (I)

Por lo tanto, $T_n(x)$ es una función derivable hasta el órden (n + 1) en un entorno υ de x = a, tal que se anula conjuntamente con sus “n” primeras derivadas en x = a.

Por ello, podemos utilizar la **Fórmula generalizada de Lagrange** , y entonces:

$$T_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} T_n^{(n+1)}(\xi) \quad \text{con } a < \xi < x \text{ o bien } x < \xi < a$$

Pero:

$$T_n^{(n+1)}(\xi) = f_n^{(n+1)}(\xi) \quad \text{por (I) en consecuencia} \quad T_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f_n^{(n+1)}(\xi)$$

con a < ξ < x o bien x < ξ < a, que es la expresión de Lagrange para el término complementario.

Entonces, reemplazando en la fórmula de Taylor para f(x), obtendremos:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + ...+ \frac{f^{n}(a)}{n!}.(x-a)^n + \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$\forall\ x \in \upsilon$, con $a < \xi < x$ o bien $x < \xi < a$, que es la llamada Fórmula de Taylor con la expresión de Lagrange para el resto.

Observaremos que también podemos escribir : $\xi = a + \theta\, h$, con $0 < \theta < 1$ y $h = x - a$.

Finalmente, si hacemos $a = 0$ en la anterior expresión de f(x), tendremos la Fórmula de Mac Laurin con la expresión de Lagrange para el término complementario: $\forall\ x \in \upsilon$:

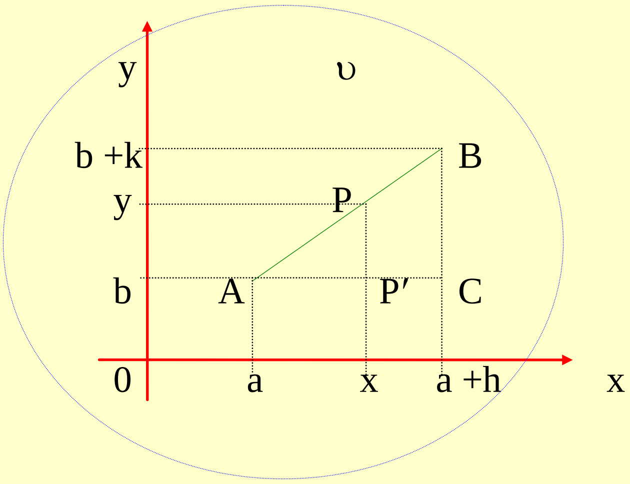
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.(x) + \frac{f''(0)}{2!}.(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}.(x)^3 + ...+ \frac{f^{n}(0)}{n!}.(x)^n + \frac{(x)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

con $0 < \theta < 1$, pues hemos tomado $\xi = \theta\, x$

FORMULAS DE TAYLOR Y MAC LAURIN PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Dada una función z = f(x,y) que sea **diferenciable hasta el orden (n + 1)** en un entorno abierto υ del punto A(a ,b), trataremos de aproximar el valor de la función f(x,y) en todo punto B(a + h, b + k) de dicho entorno υ mediante un polinomio en “h” y “k”, en menos de un término complementario T_n.

Sean, entonces, A(a ,b) $\in R^2$, υ entorno abierto, circular o rectangular, de A(a,b), z = f(x,y) una función diferenciable hasta el orden (n + 1) en υ y B(a + h, b + k) $\in \upsilon$.



Sea P(x ,y) un punto variable sobre el segmento de recta AB $\subset \upsilon$.
Los triángulos AP′P y ACB son semejantes, ver figura anterior.

Entonces, tendremos:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AP'}{AC} = \frac{P'P}{CB} = t\ , \quad \text{con } 0 \le t \le 1 \quad (1)$$

$t = 0 \Rightarrow AP = 0 \Rightarrow P \equiv A$

$t = 1 \Rightarrow AP = AB \Rightarrow P \equiv B$ volviendo a (1), resulta que es:

$$\left| \begin{array}{l} t = \dfrac{AP'}{AC} = \dfrac{x - a}{h} \\ t = \dfrac{P'P}{CB} = \dfrac{y - b}{k} \end{array} \right.$$

y resolviendo esto en "x" e "y", obtendremos:

$$\left| \begin{array}{l} x = a + h \, . \, t = x(t) \\ y = b + k \, . \, t = y(t) \end{array} \right. \quad \text{para } t \in [0,1]$$ (ecuaciones paramétricas del segmento de recta AB)

Así, para P(x ,y) variable sobre AB, resultará z = f(x ,y) = f [x(t), y(t)] = F(t), con $t \in [0,1]$, función compuesta de la variable "t".

Por otra parte, como z = f(x ,y) es diferenciable hasta el orden (n + 1) y x(t), y(t) son derivables (son lineales), resulta que F(t) = f [x(t), y(t)] es derivable hasta el orden (n + 1). Entonces, usando la fórmula de Mac Laurin para F(t):

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}\, t + \frac{F''(0)}{2!}\, t^2 + \ldots\ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\, t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}\, t^{n+1} \qquad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Haciendo t = 1 en lo anterior, tenemos:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots\ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \qquad (2) \qquad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Ahora, analizando (2) observamos que:

F(1) = f(a + h . 1, b + k . 1) = f(a + h, b + k)

F(0) = f(a + h . 0, b + k . 0) = f(a ,b)

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{df\left[x(t), y(t)\right]}{dt} = \frac{\partial f\left[x(t), y(t)\right]}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f\left[x(t), y(t)\right]}{\partial y} . \frac{dy}{dt}$$

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{df\left[x(t), y(t)\right]}{dt} = \frac{\partial f\left[x(t), y(t)\right]}{\partial x} . h + \frac{\partial f\left[x(t), y(t)\right]}{\partial y} . k$$

$$F'(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right] f(a + h.t, b + kt) = df(a + h.t, b + k.t) = H\left[x(t), y(t)\right]$$

$$F'(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]f(a,b) = df(a,b)$$

$$F''(t) = \frac{dF'(t)}{dt} = \frac{dH[x(t),y(t)]}{dt}$$ (por lo visto cuando obtuvimos F′(t))

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]H[x(t),y(t)] = \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]f(a+ht,b+kt)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^2 f(a+ht,b+kt)$$

$$F''(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^2 f(a,b) = d^2f(a,b)$$

$$F'^{n}(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^n f(a,b) = d^n f(a,b)$$

$$F^{n+1}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^{n+1} f(a+ht,b+kt) = d^{n+1} f(a+h.t,b+k.t)$$

$$F^{n+1}(\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^{n+1} f(a+h\theta,b+k\theta) = d^{n+1} f(a+h.\theta,b+k.\theta)$$

y haciendo los reemplazos correspondientes en (2), llegaremos a:

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]f(a,b) + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^2 f(a,b) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^n f(a,b) + \frac{1}{n+1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right]^{n+1} f(a+\theta h,b+\theta.k)\end{aligned}} \quad (3) \text{ con } 0<\theta<1$$

Si en (3), pasamos al primer miembro el primer término del segundo miembro, y teniendo en cuenta que f(a+h, b+k) - f(a,b) = Δz, podremos escribir:

$$\Delta z = \frac{df(a,b)}{1!} + \frac{d^2f(a,b)}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{d^nf(a,b)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(a+\theta.h,b+\theta.k)}{(n+1)!} \quad (4) \quad \text{, con } 0<\theta<1$$

Si ahora hacemos en (3) h = x - a, k = y - b, resultará que x = a + h, y = b + k; Luego, haciendo los correspondientes reemplazos en (3), se tendrá ∀(x,y) ∈ υ entorno de A(a,b):

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right] f(a,b) + \ldots + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^n f(a,b) +$$

$$\frac{1}{n+1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right]^{n+1} f\left[a + \theta(x-a), b + \theta.(y-b)\right] \quad (5)$$

(3), (4) y (5) constituyen tres presentaciones diferentes de la Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes z = f(x,y). Finalmente, si en la fórmula de Taylor (5) hacemos (a ,b) = (0,0), o sea que la desarrollamos a f(x,y) en un entorno del origen (0,0), resulta la Fórmula de Mac Laurin para una función de dos variables independientes z = f(x,y).

NOTA:
Las fórmulas de Taylor y de Mac Laurin vistas para funciones de dos variables independientes se puede generalizar, con similar demostración de las mismas, para funciones de "n" variables independientes.

La fórmula de Taylor para funciones de varias variables independientes permite, al igual que aquella para funciones de una variable independiente, aproximar funciones en un entorno de un punto establecido, que sean diferenciables hasta un orden dado en dicho entorno, mediante polinomios de varias variables. El error que se comete en dicha aproximación está dado por el término complementario.